Politechnika Wrocławska

Wiedza niepewna i wnioskowanie

Dariusz Banasiak

Katedra Informatyki Technicznej

Wydział Elektroniki

Wiedza niepewna

Wnioskowanie oparte na logice predykatów zakłada, że wiedza ma charakter dwuwartościowy: fakty zawarte w bazie wiedzy oraz uzyskane na ich podstawie konkluzje mogą być albo prawdziwe, albo fałszywe.

W życiu codziennym występują jednak pojęcia i zjawiska, które mają charakter wieloznaczny i nieprecyzyjny. Opisanie ich za pomocą klasycznej teorii zbiorów oraz logiki dwuwartościowej jest niemożliwe.

W przypadku przetwarzania wiedzy niepewnej lub niepełnej stosowana jest teoria zbiorów rozmytych i oparte na niej metody wnioskowania np. wnioskowanie przybliżone, logika rozmyta itd.

Wiedza niepewna

Rodzaje „niedoskonałości” wiedzy:

- **niepewność** – nie można jednoznacznie stwierdzić, czy dane fakty są prawdziwe, czy fałszywe
- **niepełność** – brak wystarczającej wiedzy, aby stwierdzić prawdziwość pewnych faktów (nie oznacza to jednak, że są one fałszywe)
- **niedokładność** – nie można precyzyjnie odróżnić (dla danej dziedziny wiedzy) obiektów należących do pewnej relacji od obiektów do niej nienależących

Podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych

Za pomocą zbiorów rozmytych możemy formalnie określić pojęcia nieprecyzyjne i wieloznaczne np. „średni wzrost”, „wysoka temperatura”, „duże miasto”.

Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni **X** ($A \subseteq \mathbf{X}$) nazywamy zbiór par:

$$A = \{(x, \mu_A(x); x \in \mathbf{X}\},$$

w którym $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A.

Funkcja przynależności każdemu elementowi $x \in \mathbf{X}$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A. Możemy rozróżnić trzy przypadki:

- $\mu_A(x) = 1$ – pełna przynależność elementu x do zbioru A ($x \in A$),
- $\mu_A(x) = 0$ – brak przynależność elementu x do zbioru A ($x \notin A$),
- $0<\mu_A(x)<1$ – częściowa przynależność elementu x do zbioru A

Popularną notacją zbiorów rozmytych jest zapisywanie par (stopień przynależności, element zbioru) w postaci ułamków z kreską poziomą, ukośną lub pionową.

Jeżeli X jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów **X** = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, to zbiór rozmyty $A \subseteq$ **X** zapiszemy jako:

$$A = \mu_A(x_1)|x_1 + \mu_A(x_2)|x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)|x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)|x_i$$

Elementami $x_i \in$ **X** mogą być liczby, osoby, przedmioty lub inne pojęcia.

Jeżeli **X** jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów, to zbiór rozmyty $A \subseteq$ **X** zapisujemy jako:

$$A = \int_{\mathbf{X}} \mu_A(x)|x = \sum_{\mathbf{X}} \mu_A(x)|x$$

Przykład 1

Niech **X** jest zbiorem liczb naturalnych. Pojęcie zbioru liczb naturalnych „bliskich liczby 7” opisuje definicja zbioru A:

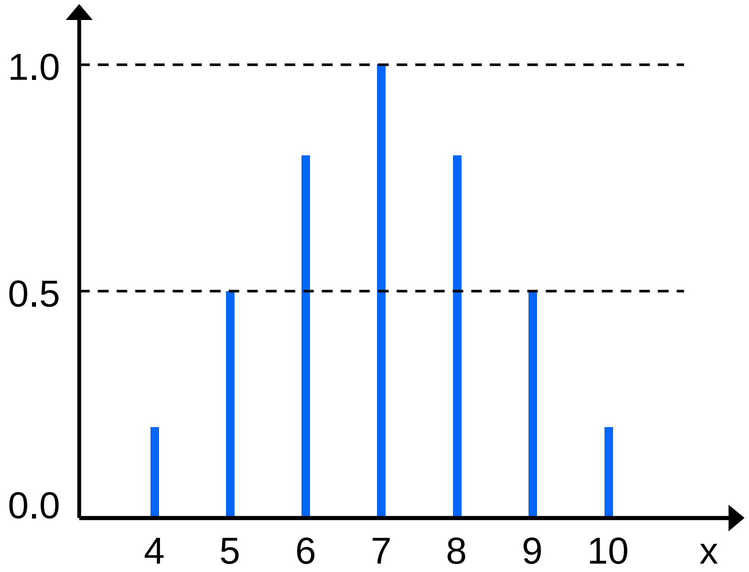
$$A = 0{,}2|4 + 0{,}5|5 + 0{,}8|6 + 1|7 + 0{,}8|8 + 0{,}5|9 + 0{,}2|10$$

Przykład 2

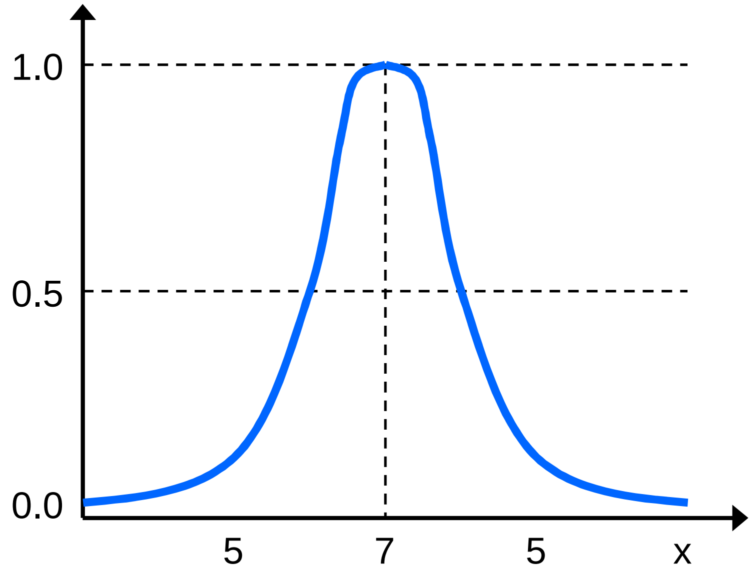
Niech **X** jest zbiorem liczb rzeczywistych. Pojęcie zbioru liczb rzeczywistych „bliskich liczby 7” opisuje definicja zbioru B:

$$B = \int_{X} (1+(x-7)^2)^{-1} \mid x$$

Wiedza niepewna



Liczba naturalna „około 7"



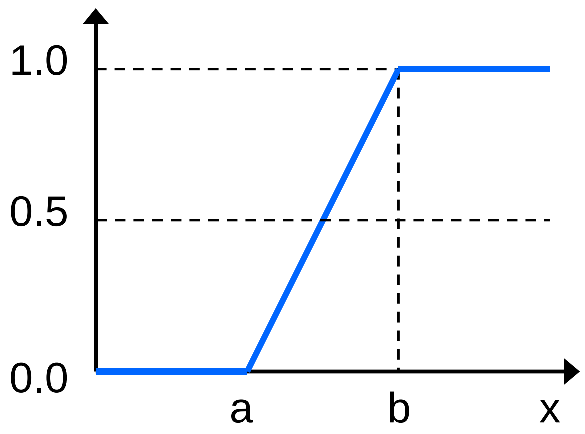
Liczba rzeczywista „około 7"

Klasy funkcji przynależności

W praktycznych zastosowaniach teorii zbiorów rozmytych często korzysta się z kilku rodzajów funkcji przynależności w dziedzinie liczb rzeczywistych **R**.

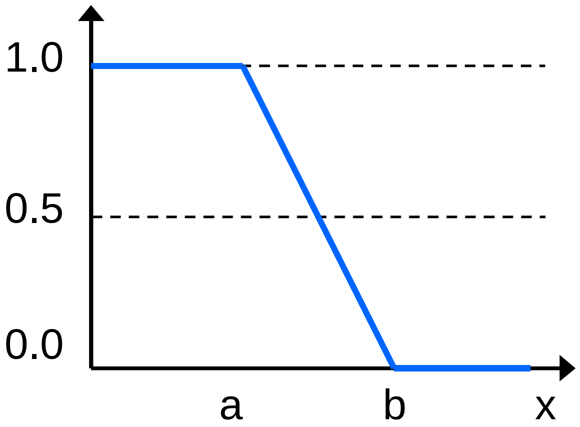
Podstawowe klasy funkcji przynależności:

- funkcja klasy Γ (gamma)



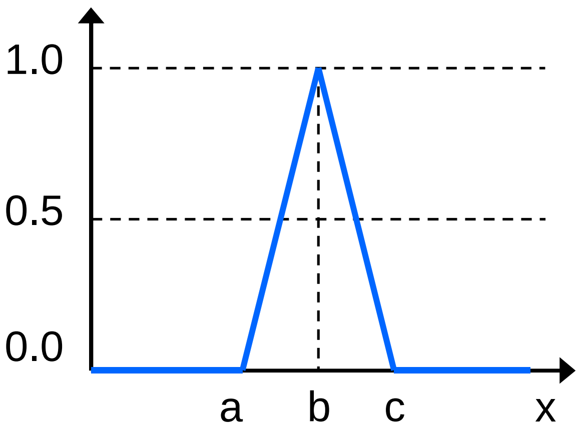
$$\Gamma_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \\ (x-a)/(b-a) & \text{dla } a < x \le b \\ 1 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

- funkcja klasy L



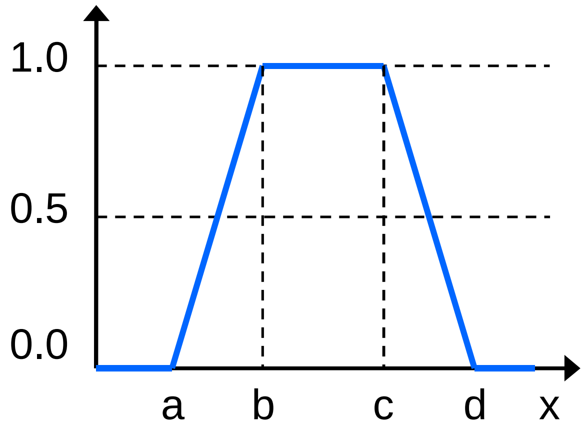
$$L_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \le a \\ (b-x)/(b-a) & \text{dla } a < x \le b \\ 0 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

- funkcja klasy Λ (lambda)



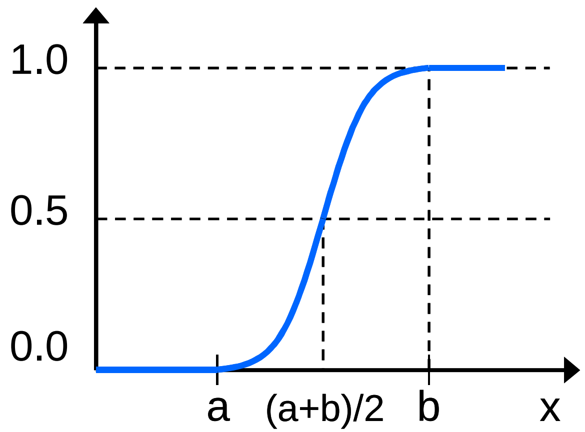
$$\Lambda_{a,b,c} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \vee x \ge c \\ (x-a)/(b-a) & \text{dla } a < x \le b \\ (c-x)/(c-b) & \text{dla } b < x < c \end{cases}$$

- funkcja klasy Π (Pi)



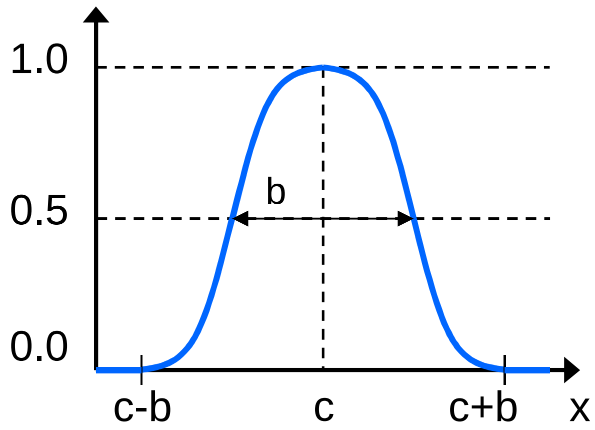
$$\Pi_{a,b,c,d} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \vee x \ge d \\ (x-a)/(b-a) & \text{dla } a < x \le b \\ 1 & \text{dla } b < x \le c \\ (d-x)/(d-c) & \text{dla } c < x < d \end{cases}$$

- funkcja typu *s*



$$s_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \\ 2*((x-a)/(b-a))^2 & \text{dla } a < x \le (a+b)/2 \\ 1-2*((x-b)/(b-a))^2 & \text{dla } (a+b)/2 < x < b \\ 1 & \text{dla } x \ge b \end{cases}$$

- funkcja klasy π



$$\pi_{b,c} = \begin{cases} s_{c-b,c}(x) & \text{dla } x<c \\ 1- s_{c,c+b}(x) & \text{dla } x\geq c \end{cases}$$

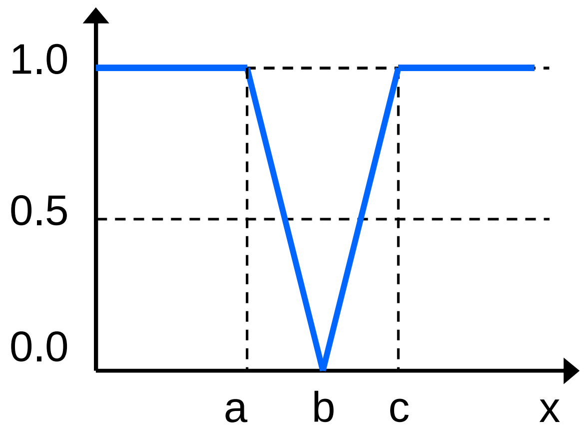
Przedstawione definicje klas funkcji przynależności wykorzystują bardzo proste kształty funkcji: składają się z fragmentów funkcji liniowej oraz fragmentów funkcji kwadratowej.

Wiele zjawisk rzeczywistych można lepiej scharakteryzować przy użyciu innych krzywych np. wielomianów wyższych stopni, funkcji wymiernych lub wykładniczych.

Przedstawiony powyżej zestaw funkcji przynależności jest niespójny. Klasa funkcji Γ jest przeciwieństwem klasy funkcji L:

$$L_{a,b}(x) = 1 - \Gamma_{a,b}(x) \qquad \Gamma_{a,b}(x) = 1 - L_{a,b}(x)$$

Zestaw funkcji przynależności można więc rozszerzyć przez zdefiniowanie funkcji przeciwnych (w powyższym sensie) dla pozostałych funkcji np. dla funkcji Λ otrzymamy funkcję V:



$$V_{a,b,c} = 1 - \Lambda_{a,b,c} = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \le a \vee x \ge c \\ (b-x)/(b-a) & \text{dla } a < x \le b \\ (x-b)/(c-b) & \text{dla } b < x < c \end{cases}$$

W literaturze można spotkać wiele innych przykładów definiowania funkcji przynależności (np. przez łączenie funkcji monotonicznych należących do różnych klas).

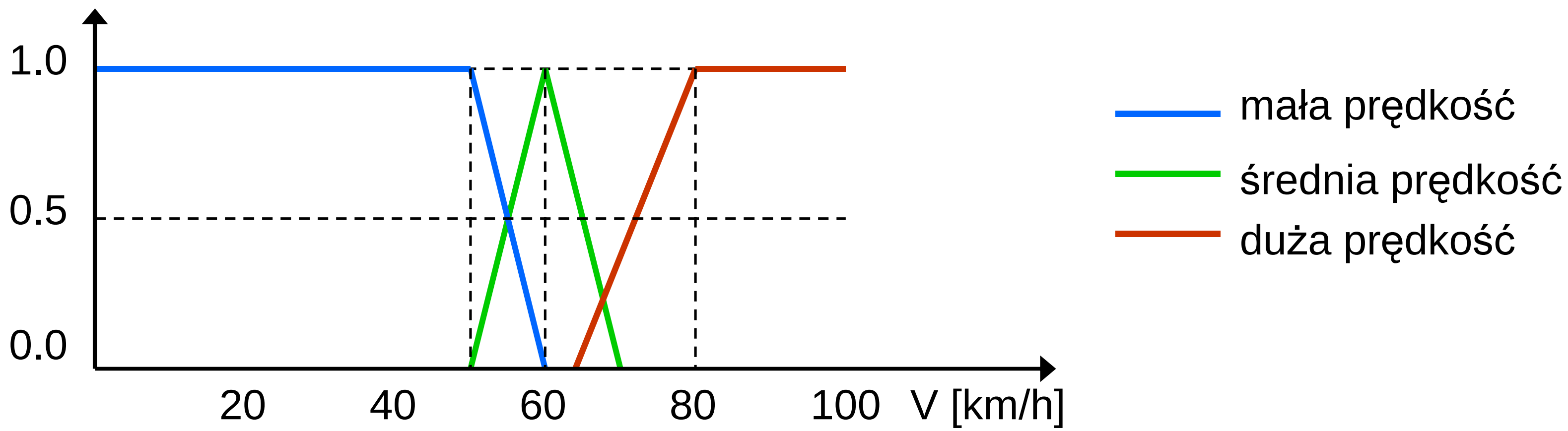
Powyższy zestaw należy więc traktować jako otwarty.

W zastosowaniach praktycznych występują dwa przypadki definiowania zbioru rozmytego:

- przez eksperta, który wybiera najlepszą funkcję przynależności dla danego problemu
- w wyniku aproksymacji zbioru wartości liczbowych (użytkownik decyduje tylko o wyborze rodzaju aproksymacji)

Przykład 1

Na obwodnicy miejskiej obowiązuje ograniczenie prędkości do 70 km/h. Należy za pomocą zbiorów rozmytych określić znaczenie następujących terminów: „mała prędkość”, „średnia prędkość” oraz „duża prędkość” (terminy te dotyczą prędkości samochodów jadących obwodnicą).



Przykład 2

Rozpatrzmy system ułatwiający wyszukiwanie kandydatów w biurze matrymonialnym. System uwzględnia następujące dane: wiek (w latach), wzrost (w cm), zarobki (roczne brutto w tysiącach) i inne. W systemie zdefiniowano następujące zbiory rozmyte:

wiek:	„młody” – $\Pi_{18,20,30,40}(x)$	„stary” – $\Gamma_{40,60}(x)$
wzrost:	„niski” – $L_{160,180}(x)$	„wysoki” – $\Gamma_{170,190}(x)$
zarobki:	„niskie” – $z_{15,40}(x)$	„wysokie” – $s_{30,60}(x)$

Uwaga! Funkcja $z_{a,b}(x) = 1 - s_{a,b}(x)$

Własności zbiorów rozmytych

Nośnikiem zbioru rozmytego A (supp A) nazywamy zbiór elementów przestrzeni **X**, dla których $\mu_A(x)>0$:

$$\text{supp } A = \{x \in X: \mu_A(x)>0\}$$

Wysokością zbioru rozmytego (h(A)) nazywamy liczbę będącą supremum (kresem górnym) wartości funkcji przynależności tego zbioru:

$$h(A) = \sup \mu_A(x), \quad \text{dla } x \in X$$

Zbiór rozmyty A nazywamy normalnym, gdy h(A) = 1.

α-przekrojem zbioru rozmytego A (A_α) nazywamy zbiór ostry elementów przestrzeni **X**, dla których $\mu_A(x) \geq \alpha$:

$$A_\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{ gdzie } \alpha \in [0,1].$$

<u>Przykład</u>

Niech A = 0,2|1 + 0,4|2 + 0,7|4 + 0,5|5 (dla X={1,2,3,4,5,6})

supp A = {1,2,4,5}

h(A) = 0,7

$A_{0,5} = \{4,5\}$

Operacje na zbiorach rozmytych

Iloczynem (przecięciem) zbiorów rozmytych A, B $\subseteq$ **X** jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności:

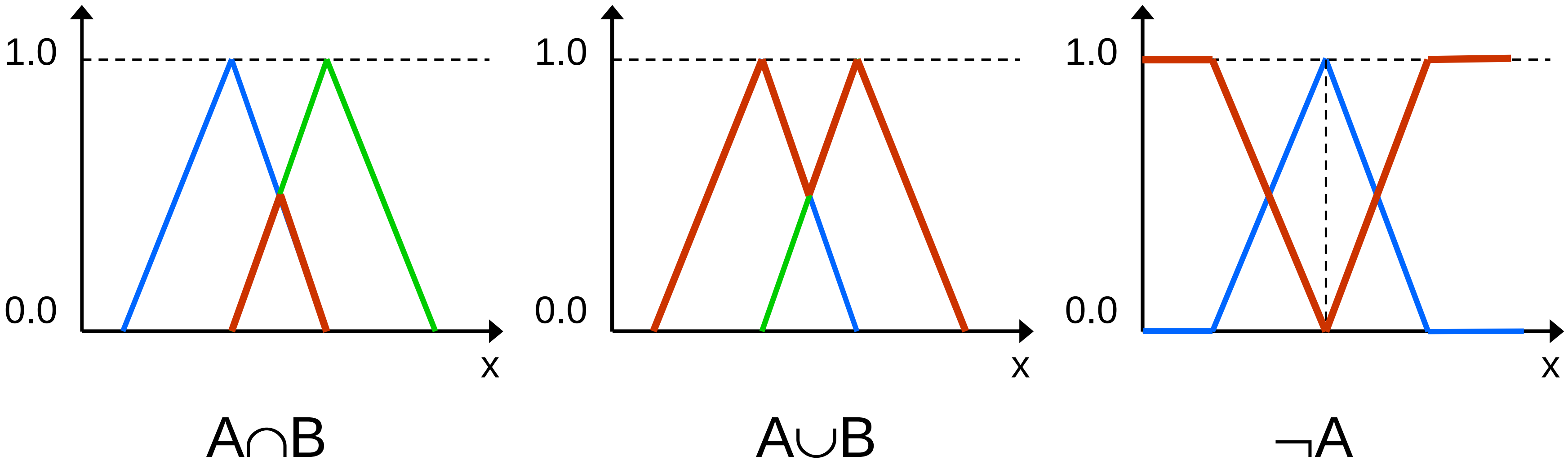
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{ dla każdego } x \in \mathbf{X}.$$

Sumą zbiorów rozmytych A, B $\subseteq$ **X** jest zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{ dla każdego } x \in \mathbf{X}.$$

Dopełnieniem zbioru rozmytego A $\subseteq$ **X** jest zbiór rozmyty $\neg$A o funkcji przynależności:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \text{dla każdego } x \in \mathbf{X}.$$



Przykład

Niech X = {1,2,3,4,5,6,7} oraz:

$A = 0{,}9|3 + 1|4 + 0{,}6|6$

$B = 0{,}7|3 + 1|5 + 0{,}4|6$

Dla zbiorów rozmytych A i B otrzymujemy:

$A \cap B = 0{,}7|3 + 0{,}4|6$

$A \cup B = 0{,}9|3 + 1|4 + 1|5 + 0{,}6|6$

$\neg A = 1|1 + 1|2 + 0{,}1|3 + 1|5 + 0{,}4|6 + 1|7$

$\neg B = 1|1 + 1|2 + 0{,}3|3 + 1|4 + 0{,}6|6 + 1|7$

W literaturze można spotkać próby znalezienia „lepszych” operacji sumy i iloczynu zbiorów rozmytych. Funkcje te powinny spełniać jednak pewne warunki.

W tym celu wprowadzono pojęcie S-normy (dla sumy) oraz T-normy (dla iloczynu). S-normy i T-normy są funkcjami, które powinny być łączne, przemienne, monotoniczne oraz muszą spełniać odpowiednie warunki brzegowe.

T-normy i S-normy można zdefiniować za pomocą operatorów algebraicznych:

iloczyn: $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$

suma: $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x)$

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych A i B (A x B), przy czym $A \subseteq \mathbf{X}$ i $B \subseteq \mathbf{Y}$, definiujemy jako:

$$\mu_{AxB}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \ \text{dla } x \in \mathbf{X}, \ y \in \mathbf{Y}.$$

lub

$$\mu_{AxB}(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y), \ \text{dla } x \in \mathbf{X}, \ y \in \mathbf{Y}.$$

<u>Przykład</u>

$X = \{2,4\}$, $A = 0{,}5|2 + 0{,}9|4$

$Y = \{2,4,6\}$ $B = 0{,}3|2 + 0{,}7|4 + 0{,}1|6$

$$A \times B = 0{,}3|(2,2) + 0{,}5|(2,4) + 0{,}1|(2,6) + 0{,}3|(4,2) + 0{,}7|(4,4) + 0{,}1(4,6)$$

Koncentracją zbioru rozmytego A (gdzie $A \subseteq \mathbf{X}$) nazywamy zbiór rozmyty *CON*(A) o wartościach funkcji przynależności podniesionych do kwadratu:

$$\mu_{CON(A)}(x) = [\mu_A(x)]^2, \ \text{dla } x \in \mathbf{X}.$$

Rozcieńczeniem (rozrzedzeniem) zbioru rozmytego A (gdzie $A \subseteq \mathbf{X}$) nazywamy zbiór rozmyty *DIL*(A) o wartościach funkcji przynależności będących pierwiastkami kwadratowymi wartości funkcji przynależności zbioru A:

$$\mu_{DIL(A)}(x) = [\mu_A(x)]^{0,5}, \ \text{dla } x \in \mathbf{X}.$$

Relacje rozmyte

Relacje rozmyte pozwalają sformalizować nieprecyzyjne sformułowania typu „x relacja y” np. „x jest prawie równe y”.

Relacją rozmytą R określoną na niepustych, ostrych zbiorach X i Y nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim X x Y:

$$R = \int_{X \times Y} \mu_R(x,y)|(x,y)$$

Dla zbiorów skończonych:

$X = \{x_1, x_2, \dots , x_n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, \dots , y_m\}$

relację rozmytą można wyrazić tzw. macierzą rozmytą.

Przykład

Niech X = {3,4,5} oraz Y = {4,5,6}. Określić relację rozmytą odpowiadającą stwierdzeniu: „y jest mniej więcej równe x”.

	y_1=4	y_2=5	y_3=6
x_1=3	0,8	0,6	0,4
x_2=4	1,0	0,8	0,6
x_3=5	0,8	1,0	0,8

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x=y \\ 0,8 & \text{jeżeli } |x-y| = 1 \\ 0,6 & \text{jeżeli } |x-y| = 2 \\ 0,4 & \text{jeżeli } |x-y| = 3 \end{cases}$$

Przykład

Zdefiniować relacje między dwoma skończonymi zbiorami osób: instruktorów X = {a,b,c} oraz kursantów Y = {d,e,f,g}. Każdą osobę opisują dwa argumenty: wiek (w latach) i wzrost (w cm):

	a	b	c	d	e	f	g
wiek	35	45	50	15	20	25	30
wzrost	178	182	168	188	180	182	198

Na zbiorach X i Y określić relacje:

R – „instruktor dużo starszy od kursanta"

S – „instruktor podobnego wzrostu co kursant"

R	d_{15}	e_{20}	f_{25}	g_{30}
a_{35}	0,9	0,7	0,5	0,4
b_{45}	1,0	0,8	0,6	0,5
c_{50}	1,0	0,9	0,8	0,6

S	d_{188}	e_{180}	f_{182}	g_{198}
a_{178}	0,3	0,8	0,8	0,2
b_{182}	0,3	0,8	1,0	0,2
c_{168}	0	0	0	0

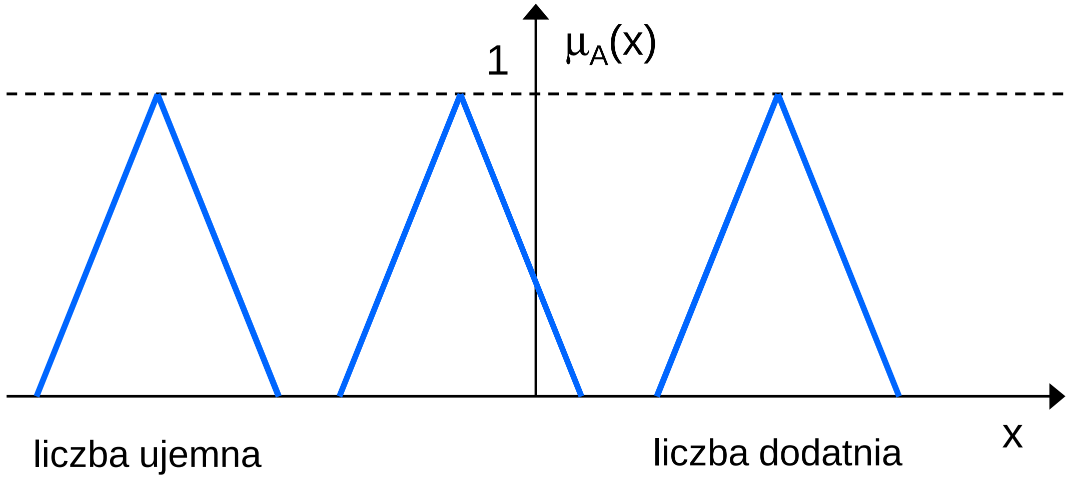
Liczby rozmyte

W teorii zbiorów rozmytych ważną grupę stanowią zbiory zdefiniowane w przestrzeni liczb rzeczywistych np. zbiór liczb „bliskich wartości 7”.

Zbiór rozmyty A określony w zbiorze liczb rzeczywistych ($A \subseteq R$) nazywamy liczbą rozmytą jeżeli spełnione są następujące warunki:

- zbiór A jest normalny ($\sup_{x \in R} \mu_A(x)=1$),
- zbiór A jest wypukły ($\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\}$, $\lambda \in [0,1]$)
- funkcja $\mu_A(x)$ jest funkcją przedziałami ciągłą.

Przykłady liczb rozmytych:



Liczba rozmyta $A \subseteq R$ jest dodatnia, jeżeli $\mu_A(x)=0$ dla $x<0$.

Liczba rozmyta $A \subseteq R$ jest ujemna, jeżeli $\mu_A(x)=0$ dla $x>0$.

Dla liczb rozmytych można zdefiniować podstawowe operacje arytmetyczne.

Zasada rozszerzania

Zasada rozszerzania pozwala zdefiniować różne operacje matematyczne dla zbiorów rozmytych.

Dane jest pewne nierozmyte odwzorowanie *f* przestrzeni X w przestrzeń Y:

$$f:\ X \to Y$$

Niech A będzie danym zbiorem rozmytym ($A \subseteq X$):

$$A = \mu_A(x_1)|x_1 + \mu_A(x_2)|x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)|x_n$$

Zbiór rozmyty B ($B \subseteq Y$) indukowany przez odwzorowanie *f* na podstawie A ma postać:

$$B = f(A) = \mu_A(x_1)|f(x_1) + \mu_A(x_2)|f(x_2) + \ldots + \mu_A(x_n)|f(x_n)$$

Zasadę rozszerzania można uogólnić na przypadek, gdy X jest iloczynem kartezjańskim zbiorów nierozmytych, czyli:

$$f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$$

W przypadku operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych odwzorowanie f ma postać:

$$y = f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{dla dodawania liczb rozmytych } A_1 \text{ i } A_2 \\ x_1 - x_2 & \text{dla odejmowania liczb rozmytych } A_1 \text{ i } A_2 \\ x_1 * x_2 & \text{dla mnożenia liczb rozmytych } A_1 \text{ i } A_2 \\ x_1 / x_2 & \text{dla dzielenia liczb rozmytych } A_1 \text{ i } A_2 \end{cases}$$

Dodawanie liczb rozmytych A_1 i A_2 oznaczamy jako:

$$A_1 \oplus A_2 = B\ ,$$

przy czym funkcja przynależności jest określona wzorem:

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1,x_2 \\ y=x_1+x_2}} \min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}$$

Przykład

Dodać dwie liczby rozmyte A_1 i A_2:

$A_1 = 0{,}7|2 + 1|3 + 0{,}6|4$

$A_2 = 0{,}8|3 + 1|4 + 0{,}5|6$

$A_1 \oplus A_2 =$ min(0,7;0,8)|5 + max{min(0,7;1),min(1;0,8)}|6 + max{min(1;1),min(0,6;0,8)}|7+max{min(0,7;0,5),min(0,6;1)}|8 + min(1;0,5)|9 + min(0,6;0,5)}|10 =
0,7|5 +0,8|6 +1|7 +0,6|8 +0,5|9 +0,5|10